Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

Теоретическая механика и механика сплошной среды, 4 семестр

Код, направление подготовки	03.03.02 Физика
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

РАЗДЕЛЫ I – VII

1. Записать преобразование поворота $\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$ в матричной форме. Используйте следующие обозначения: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\delta\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \delta\varphi_x \\ \delta\varphi_y \\ \delta\varphi_z \end{pmatrix}$. Каковы свойства матрицы (инфинитезимальных) поворотов?
2. Покажите, что последовательное выполнение двух инфинитезимальных преобразований поворота на углы $\delta\vec{\varphi}_1$ и $\delta\vec{\varphi}_2$ представляет собой также поворот и найдите соответствующий ему угол, а также направление оси поворота.
3. Рассмотрите коммутатор двух преобразований поворота на углы $\delta\vec{\varphi}_1$ и $\delta\vec{\varphi}_2$. Коммутатор представляет собой **разность** двух последовательных преобразований, производимых в разной последовательности. Покажите, что коммутатор отличен от нуля и представляет собой бесконечно малый поворот более высокого (второго) порядка. Найдите угол этого поворота.

4. На плоскости XY задан вектор $\vec{V} = (ax + by, cx + dy)$, где a, b, c и d – постоянные. Доказать, что вектор $\vec{V}$ есть линейная комбинация векторов $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и $\vec{t} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ с постоянными коэффициентами. Используйте ортогональность векторов $\vec{r}$ и $\vec{t}$, а также то, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, определяющая вектор $\vec{V}$, является ортогональной с точностью до множителя. Найдите указанные коэффициенты.
5. Покажите, что: a) $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B}$; b) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{A}|^2 \, |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$;

a. c) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = 0$, если четыре вектора $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C},$ и $\vec{D}$ лежат в одной плоскости.

6. Вектор $\vec{D}$ является линейной комбинацией трёх не ортогональных и некомпланарных векторов: $\vec{D}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$. Показать, что коэффициенты разложения $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ определяются соотношениями: $\alpha=\dfrac{\vec{D}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})}$, и т.д.
7. Показать, что $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D}))\vec{C}-(\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}))\vec{D}$. Как объяснить отсутствие в этом выражении симметрии между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$ с одной стороны, и $\vec{C}$ и $\vec{D}$ с другой?
8. Показать, что $\vec{A}\times(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))=(\vec{A}\times\vec{C})\vec{B}\cdot\vec{D}-(\vec{A}\times\vec{D})\vec{B}\cdot\vec{C}$.
9. Укажите, как алгебраически, используя линейные комбинации, из трёх не ортогональных векторов $\vec{A},\vec{B}$ и $\vec{C}$ (считая их известными) получить три ортогональных вектора $\vec{A}',\vec{B}'$ и $\vec{C}'$. Найти коэффициенты разложений штрихованных векторов по «нештрихованным». Является ли процедура ортогонализации однозначной?

10. Найти траекторию, скорость и ускорение материальной точки, если закон движения имеет вид $x=a\cos\omega t,\ y=b\sin\omega t,\ z=0$, где $a,b,\omega=\mathrm{const}$. Траектории изобразить в пространстве.
11. Определить период одномерного движения частицы массы m с энергией E в потенциальном поле вида $U=-\dfrac{U_0}{\mathrm{ch}^2\,\alpha x}$, $(-U_0<E<0)$.
12. Найти траекторию заряженной частицы с массой m и зарядом q в электрическом поле напряженности $\vec{E}$, если при $x(0)=0, \dot{x}(0)=2.$ скорость частицы равна $\vec{V}_0$, причем $\vec{E}=\vec{E}_0\cos\omega t$, а $\vec{V}_0$ перпендикулярно $\vec{E}_0$.
13. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки массы $m=1$ в поле $U(r)=1/2r^2$, для $E>0$.
14. Найти закон движения частицы в поле $U(x)=-Ax^4$, если энергия ее равна нулю.
15. Найти ускорение материальной точки, движущейся по траектории $\rho=\rho_0 e^{-\lambda\phi},\ z=0$, если секторная скорость (то есть площадь, «заметаемая» радиус-вектором точки в единицу времени) $\sigma=\sigma_0=const$ относительно начала координат. Параметры ρ_0,λ,σ_0 траектории считать известными. Вектор ускорения представить как функцию расстояния ρ до начала координат.

16. Указать условия финитности движения, найти точки поворота и период колебаний для материальной точки массы $m=1$ в поле: $U(x)=x^2$.
17. Тело массы m движется по закону $x=a\cos\omega t$, $y=b\sin\omega t$. Определить силу, действующую на частицу в каждой точке траектории.
18. Точка массой m движется по спирали Архимеда, в полярной системе координат имеющей вид $\rho=At$, $\varphi=Bt$. Найти действующую на точку силу – ее проекции и модуль.
19. Проинтегрировать уравнение движения материальной точки массы $m=2$, движущейся в поле $U=-\mathrm{tg}^2\,x$, если при $t=0$ $x=0, \dot{x}=2.$
20. Точка движется в плоскости так, что ее секторная скорость $\sigma_z=k\rho^2/2$, а угол между ускорением и радиусом-вектором точки постоянен и равен $\pi/4$. Найти закон движения и уравнение траектории точки, если $\rho(0)=0$, $\varphi(0)=0$ и $\dot{\rho}(0)=\dot{\rho}_0$.

21. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m=1$, движущейся в поле: $U(r)=\frac{1}{2}r^2$

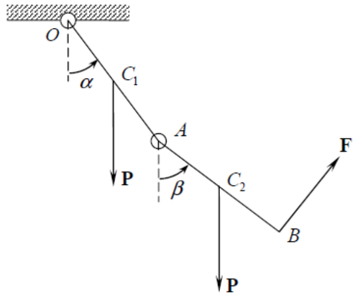
22. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m=1$, движущейся в поле: $U(r)=\left(\frac{1}{r^2}+r^2\right)\frac{1}{2}$

23. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m=1$, движущейся в поле: $U(r)=1/r^4$.

24. Определить траекторию частицы в поле $U(r)=\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta}{r^2}$. Найти время падения частицы в центр поля с расстояния r_0. Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица?

25. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m=1$, движущейся в поле: $U(r)=-\alpha^2/2r^2$, $\alpha=const$.

26. Двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней массы m и длины ℓ каждый, может совершать движение в вертикальной плоскости (в точках A и O – цилиндрические шарниры). Помимо силы тяжести, действующей на стержни, к точке B стержня AB приложена постоянная по величине перпендикулярная к стержню сила $\mathbf{F}$ (см. рисунок). Определить положения равновесия.



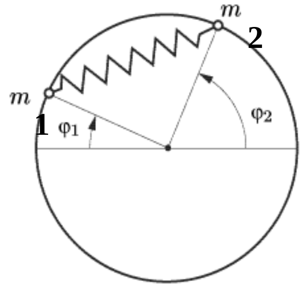
27. Однородный стержень $AB=\ell$ может двигаться в вертикальной плоскости XY так, что конец A скользит по прямой OY, а конец B — по кривой $y=f(x)$. Плоскость XY вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси OY. Трение в системе отсутствует. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы любое положение стержня было положением относительного равновесия, если $f(0)=0$?

28. Мотоциклист увеличивает свою скорость сначала с 55 до 60 км/ч, а затем с 60 до 65 км/ч. Сравнить величины совершаемой при этом работы.

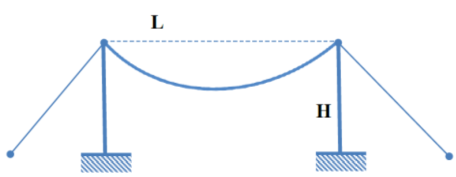
29. Каждый элемент бесконечно тонкого однородного неподвижного обруча радиуса R и общей массы M притягивает материальную точку P, лежащую на перпендикуляре к плоскости обруча, проходящем через его центр O. Силы притяжения описываются законом всемирного тяготения. Определить скорость, с которой материальная точка P пересечет плоскость обруча, если в начальный момент расстояние OP было равно l, а точка покоилась.

30. Однородную цепочку держат за верхний конец так, что нижним концом она касается стола, а затем отпускают. Показать, что в процессе падения цепочки сила давления на стол превышает вес лежащей на столе части цепочки в три раза.

31. Две точечные массы m_1 и m_2 (см. рисунок), связанные пружиной жесткости k, могут двигаться без трения, по неподвижному кольцу радиуса r, лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l. Составить уравнения Лагранжа. Используя аналогию с поступательным движением системы двух тел, определить новые обобщённые координаты и найти закон движения в квадратурах.

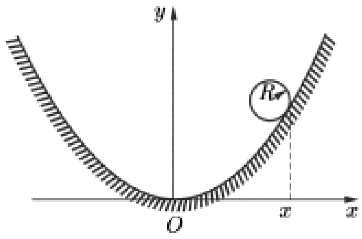


32. Определить форму кривой, которую приобретает нерастяжимая нить массы M и длины l, закреплённая



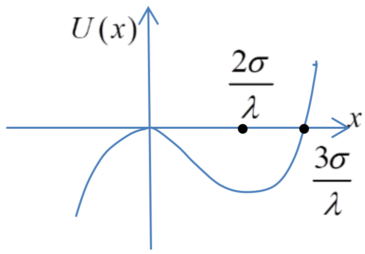
на двух вертикальных опорах (см. рисунок). Как следует ориентировать боковые растяжки, чтобы моменты сил реакций, действующих на опоры, были равны нулю? Предельно допустимая сила натяжения растяжек равна F, а расстояние между опорами – L.

33. Однородный диск радиуса R и массы m (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по параболе $y = ax^2/2$. Ось OY вертикальна, $Ra \le 1$. Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщенную координату абсциссу x точки касания. Получить уравнения Лагранжа.



34. Шарнирно закреплённая за один конец спица массы M может свободно вращаться в горизонтальной плоскости без трения. На спицу надета лёгкая пружина и бусинка массы m, прикреплённая к одному концу пружины. Второй конец пружины прикреплён к шарниру. В начальный момент пружина не натянута. Резким толчком спице сообщают угловую скорость ω_0. Получить уравнения Эйлера – Лагранжа для этой системы. Описать движение бусинки и спицы. Длина нерастянутой пружины равна l_0.

35. Потенциальная энергия частицы $U(x) = -\dfrac{\sigma x^2}{2} + \dfrac{\lambda x^3}{3!}$. Начальные условия: $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = A$, $A = \dfrac{3\sigma}{\lambda}$. Найти решение $x(t)$ уравнений движения.



36. Космический аппарат находится на круговой орбите радиуса r_0. Найти величину тангенциального приращения скорости $\delta\upsilon$ для перехода на эллиптическую орбиту с полуосью $a > r_0$ и время перелёта до апогея новой орбиты.

37. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плоскостью, движущейся поступательно с постоянной скоростью. Ориентация плоскости и направления скоростей частицы и плоскости до столкновения произвольны.

38. Две точечные массы m_1 и m_2, связанные пружиной жесткости k, могут двигаться без трения по сторонам прямого угла $\angle XOY$, сторона OY которого вертикальна. Длина пружины в ненапряжённом состоянии равна ℓ_0. Ускорение свободного падения равно g. Составить уравнения Лагранжа.

39. Жёсткая проволочка согнута в форме параболы. На проволочку надета бусинка массы M. Парабола ориентирована вертикально в поле тяжести, так что бусинка может свободно перемещаться по проволочке, совершая колебания. Проволочку приводят во вращение относительно (вертикально расположенной) оси симметрии параболы с угловой скоростью ω. Записать функцию Лагранжа и получить уравнения движения.

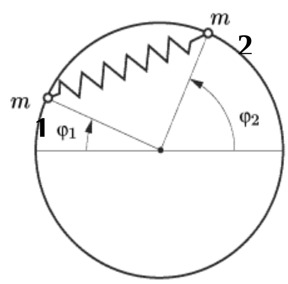
40. Найти решение уравнений движения маятника Фуко в окрестности положения равновесия. Указание: функция Лагранжа, записанная во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ системе координат, имеет вид: $L = \dfrac{m(\vec{\upsilon} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} + m\vec{g} \cdot \vec{r}$.

РАЗДЕЛ I
(*Методы описания движений, кинематика*)

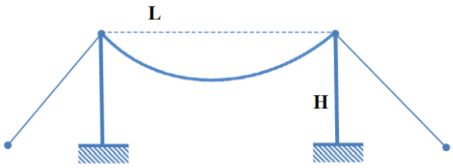
1. Найти траекторию, скорость и ускорение материальной точки, если закон движения имеет вид $x = a\cos\omega t,\ y = b\sin\omega t,\ z = 0$, где $a, b, \omega = \text{const}$. Траектории изобразить в пространстве.
2. Найти ускорение материальной точки, движущейся по траектории $\rho = \rho_0 e^{-\lambda\varphi},\ z = 0$; если секторная скорость $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0 = const$ относительно начала координат. Параметры траектории считать известными. Вектор ускорения представить как функцию расстояния до начала отсчета.
3. Точка массой m движется по спирали Архимеда, в полярной системе координат имеющей вид $\rho = At$, $\varphi = Bt$. Найти действующую на точку силу – ее проекции и модуль.
4. Точка движется в плоскости так, что ее секторная скорость $\sigma_z = k\rho^2/2$, а угол между ускорением и радиусом-вектором точки постоянен и равен $\pi/4$. Найти закон движения и уравнение траектории точки, если $\rho(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ и $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$.
5. Тело массы m движется по закону $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$. Определить силу, действующую на частиуц в каждой точке траектории.

РАЗДЕЛ II
(***Принцип наименьшего действия и основная задача механики***)

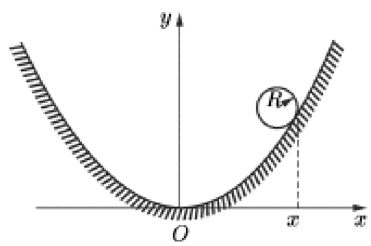
1. Две точечные массы m_1 и m_2 (см. рисунок), связанные пружиной жесткости k, могут двигаться без трения, по неподвижному кольцу радиуса r, лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Составить уравнения Лагранжа. Используя координаты $\vartheta_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ и $\vartheta_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$, найти закон движения в квадратурах.



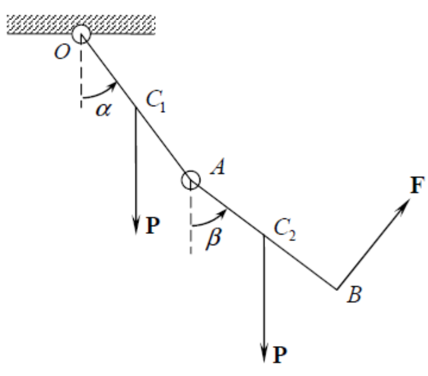
2. Определить форму кривой, которую приобретает нерастяжимая нить массы M и длины ℓ, закреплённая на двух вертикальных опорах (см. рисунок). Как следует ориентировать боковые растяжки, чтобы моменты сил реакций, действующих на опоры, были равны нулю? Предельно допустимая сила натяжения растяжек равна F, высота опор – H, а расстояние между ними – L.



3. Однородный диск радиуса R и массы m (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по параболе $y = ax^2/2$. Ось OY вертикальна, $Ra \le 1$. Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщенную координату абсциссу x точки касания. Получить уравнения Лагранжа.



4. Двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней массы m и длины ℓ каждый, может совершать движение в вертикальной плоскости (в точках A и O – цилиндрические шарниры). Помимо силы тяжести, действующей на стержни, к точке B



стержня AB приложена постоянная по величине перпендикулярная к стержню сила $\mathbf{F}$ (см. рисунок). Определить положения равновесия.

5. Шарнирно закреплённая за один конец спица массы M может свободно вращаться в горизонтальной плоскости без трения. На спицу надета лёгкая пружина и бусинка массы m, прикреплённая к одному концу пружины. Второй конец пружины прикреплён к шарниру. В начальный момент пружина не натянута. Резким толчком спице сообщают угловую скорость ω_0. Получить уравнения Эйлера – Лагранжа для этой системы. Описать движение бусинки и спицы. Длина нерастянутой пружины равна ℓ_0.

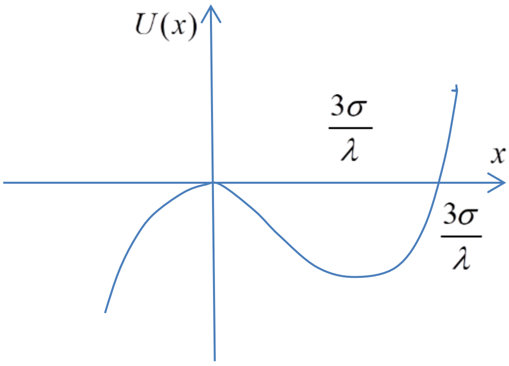
6. Используя оптико-механическую аналогию, найти траектории светового луча в среде с коэффициентом преломления $n(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2)^{-1/4}$.

РАЗДЕЛЫ III - IV
(*Законы сохранения, Малые колебания*)

1. Определить период одномерного движения частицы массы m с энергией E в потенциальном поле вида $U = -\dfrac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$, $(-U_0 < E < 0)$.
2. Найти траекторию заряженной частицы с массой m и зарядом q в электрическом поле напряженности $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega t$, если $x(0)=0,\ y(0)=0$, а начальная скорость частицы $\vec{V}_0$ перпендикулярна $\vec{E}_0$.
3. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки массы $m = 1$ в поле $U(r) = 1/2r^2$, для $E > 0$.
4. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если энергия ее равна нулю.
5. Указать условия финитности движения, найти точки поворота и период колебаний для материальной точки массы $m = 1$ в поле: $U(x) = x^2$.
6. Проинтегрировать уравнение движения материальной точки массы $m = 2$, движущейся в поле $U = -\operatorname{tg}^2 x$, если при $t = 0$ $x = 0, \dot{x} = 2$.
7. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = \dfrac{1}{2} r^2$
8. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = \left(\dfrac{1}{r^2} + r^2\right)\dfrac{1}{2}$
9. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = 1/r^4$.
10. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = \dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\beta}{r^2}$. Найти время падения частицы в центр поля с расстояния r_0. Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица?
11. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = -\alpha^2 / 2r^2$, $\alpha = const$.

12. Мотоциклист увеличивает свою скорость сначала с 55 до 60 км/ч, а затем с 60 до 65 км/ч. Сравнить величины совершаемой при этом работы.

13. Каждый элемент бесконечно тонкого однородного неподвижного обруча радиуса R и общей массы M притягивает материальную точку P, лежащую на перпендикуляре к плоскости обруча, проходящем через его центр O. Силы притяжения описываются законом всемирного тяготения. Определить скорость, с которой материальная точка P пересечет плоскость обруча, если в начальный момент расстояние OP было равно ℓ, а точка покоилась.
14. Однородную цепочку держат за верхний конец так, что нижним концом она касается стола, а затем отпускают. Показать, что в процессе падения цепочки сила давления на стол превышает вес лежащей на столе части цепочки в три раза.
15. Потенциальная энергия частицы $U(x) = -\frac{\sigma x^2}{2} + \frac{\lambda x^3}{3!}$. Начальные условия: $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = A$, $A = \frac{3\sigma}{\lambda}$. Найти решение $x(t)$ уравнений движения.
16. Космический аппарат находится на круговой орбите радиуса r_0. Найти величину тангенциального приращения скорости $\delta\upsilon$ для перехода на эллиптическую орбиту с полуосью $a > r_0$ и время перелёта до апогея новой орбиты.

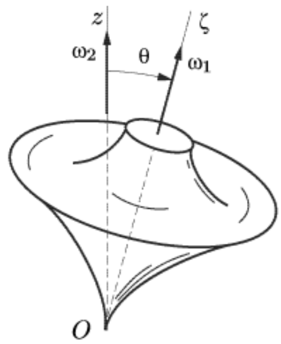


17. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плоскостью, движущейся поступательно с постоянной скоростью. Ориентация плоскости и направления скоростей частицы и плоскости до столкновения произвольны.

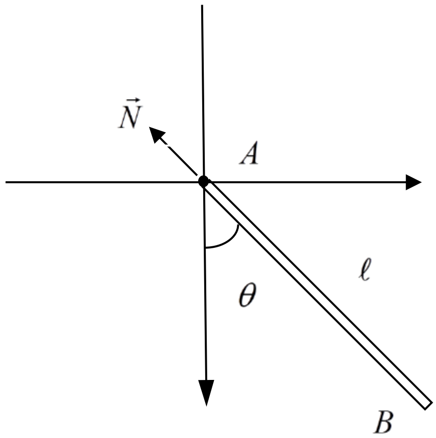
РАЗДЕЛЫ V

(***Уравнения движения твёрдого тела)***

1. Юла (см. рисунок) вращается вокруг своей оси симметрии $O\varsigma$ с постоянной угловой скоростью ω_1. Ось $O\varsigma$ равномерно вращается относительно вертикали Oz с угловой скоростью ω_2, так что угол θ остаётся постоянным (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы относительно Oz.

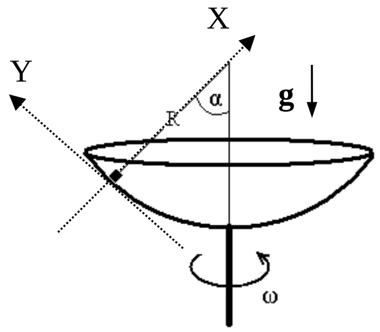


2. При движении твердого тела заданы его угловая скоскорость $\vec{\omega}_r$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_r$ относительно некоторой подвижной системы отсчета. Известны также угловая скорость $\vec{\omega}_e$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_e$ этой подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Определить угловую скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ тела.
3. Однородный стержень AB движется в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку A. Найти закон движения стержня и силы реакции, действующие со стороны оси.

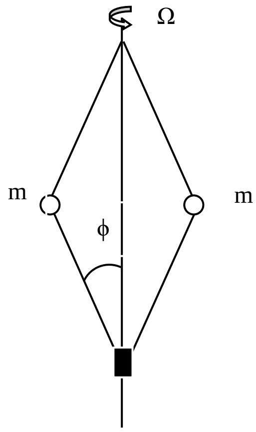


РАЗДЕЛ VI
(Неинерциальные системы отсчёта)

1. Найти решение уравнений движения маятника Фуко в окрестности положения равновесия. Указание: функция Лагранжа, записанная во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ системе координат, имеет вид: $L = \dfrac{m(\vec{\upsilon}+\vec{\Omega}\times\vec{r})^2}{2} + m\vec{g}\cdot\vec{r}$.
2. Однородный стержень $AB = \ell$ может двигаться в вертикальной плоскости XY так, что конец A скользит по прямой OY, а конец B — по кривой $y = f(x)$. Плоскость XY вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси OY. Трение в системе отсутствует. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы любое положение стержня было положением относительного равновесия, если $f(0) = 0$?
3. Чашка насажена на вертикальную ось. Радиус сферической поверхности чашки R = 10 см. Чашка может раскручиваться вокруг вертикальной оси. Маленькую шайбу массой m = 50 г кладут на внутреннюю поверхность чашки. Положение шайбы относительно чашки задается углом α. Если чашка не вращается, то шайба покоится в положениях, для которых $\alpha < 20^0$. Ускорение свободного падения g = 10 Н/кг. Чему равен коэффициент трения покоя между шайбой и внутренней поверхностью чашки? Ответ округлите до сотых. Определить значение угловой скорости (в рад/с) вращения чашки, когда угол $\alpha = 10^0$, а шайба не будет двигаться относительно поверхности чашки, и при этом сила трения будет равна нулю. Ответ округлите до десятых.



4. Четыре стержня длины ℓ и пренебрежимо малой массы шарнирно соединены с массами m, как показано на рисунке (центробежный регулятор скорости вращения). Система вращается с постоянной угловой скоростью Ω. Массы слегка выводят из положения равновесия. Определить частоту малых колебаний системы. Масса муфты, свободно перемещающейся по оси вращения и шарнирно скреплённой со стержнями, равна M .



5. Тележка с закреплённым на ней математическим маятником удерживается на наклонной плоскости. Угол наклона плоскости равен α . Тележку отпускают. Описать, как будет вести себя маятник в процессе скатывания тележки с наклонной плоскости. Длину маятника считать известной.

РАЗДЕЛ VII
(*Основы канонического формализма)*

1. Показать, что если для системы второго порядка $\dot{q} = Q(q,p,t)$, $\dot{p} = P(q,p,t)$ сохраняется «фазовый объём», то эта система является гамильтоновой, т.е. существует такая функция $H(q,p,t)$, что $Q(q,p,t) = \dfrac{\partial H}{\partial p}$, $P(q,p,t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q}$.

2. Материальная точка единичной массы движется по инерции вдоль оси Ox. На фазовой плоскости (x, p_x) выбирается область G_0 — круг единичного радиуса.

Совокупность движений точки (с начальными условиями в G_0) переводит G_0 в G_t. Найти вид области G_t для произвольного момента времени *t*. Непосредственным вычислением убедиться в сохранении фазового объема.

3. Систему с гамильтонианом $H = pq^3 / Bt$ подвергнуть преобразованию

$$\tilde{q} = \frac{1}{q^2} + \ln(tpq^3), \quad \tilde{p} = pq^3\left(1 + t\exp(1/q^2)\right)$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти гамильтониан преобразованной системы.

4. Для системы с одной степенью свободы скобки Пуассона функций $H_1(q,p,t)$ и $H_2(q,p,t)$ удовлетворяют соотношению $\{H_1, H_2\} = 1$. Показать, что если гамильтониан системы равен

a) $H = H_1 + H_2$; b) $H = H_1 H_2$;

c) $H = H_1 / H_2$; d) $H = H_1^2 + H_2^2$,

то общее решение соответствующей канонической системы уравнений можно найти, решив относительно q, p систему алгебраических уравнений:

$$a)\ H_1(q,p,t) = c_1 + t, \quad H_2(q,p,t) = c_2 - t;$$
$$b)\ H_1(q,p,t) = c_1 e^t, \quad H_2(q,p,t) = c_2 e^{-t};$$
$$c)\ H_1(q,p,t) = c_1\sqrt{2t + c_2}, \quad H_2(q,p,t) = \sqrt{2t + c_2};$$
$$d)\ H_1(q,p,t) = c_1 \sin(2t + c_2), \quad H_2(q,p,t) = c_1 \cos(2t + c_2).$$

Типовые вопросы к экзамену:

1. Векторы. Операции над векторами. Кинематические характеристики движения материальной точки. Дифференцирование векторов. Тангенциальная и нормальная компоненты ускорения.
2. Сопровождающий репер. Репер Френе. Уравнения Френе – Серре. Кривизна и кручение – «внутренние» геометрические характеристики траектории. Примеры.
3. Системы ортогональных криволинейных координат. Коэффициенты Ламэ. Основная квадратичная форма в различных системах криволинейных ортогональных координат.
4. Основная задача механики для систем материальных точек. Связь с теоремой Коши. Примеры траекторий.
5. Центр масс системы материальных точек. Примеры нахождения центров масс твёрдых тел. Первый закон Ньютона для системы материальных точек.
6. Система двух материальных точек. Теорема о кинетической энергии системы двух тел. Классификация парных столкновений (ударов).
7. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Условный экстремум. Нахождение условного экстремума прямым методом и методом неопределённых множителей Лагранжа.
8. Понятие о вариационных методах механики. Цепная линия. Функционал и его первая вариация. Необходимое условие экстремума.
9. Степени свободы механической системы и обобщённые координаты. Примеры. Принцип наименьшего действия Гамильтона. Уравнения Лагранжа.
10. Функция Лагранжа и её свойства. Принцип относительности Галилея и функция Лагранжа свободной частицы.
11. Функция Лагранжа в криволинейных координатах – примеры механических систем. Функция Лагранжа системы взаимодействующих материальных точек.
12. Однородность пространства-времени и законы сохранения энергии и импульса.
13. Изотропность пространства и закон сохранения момента импульса замкнутой системы.

14. Импульс и момент импульса механической системы в разных инерциальных системах отсчёта. Теорема Кёнига.
15. Движение с одной степенью свободы. Сведение к квадратурам. Финитное движение. Период нелинейных колебаний и его зависимость от энергии.
16. Масштабные преобразования и теория подобия механических систем. Примеры.
17. Теорема о вириале и её применение.
18. Движение относительно неинерциальных систем отсчёта. Переносное ускорение. Кориоливсово ускорение. Канонический и кинетический импульсы в неинерциальных системах отсчёта.
19. Задача двух тел. Сведение к задаче о движении одного тела в заданном потенциальном поле. Законы сохранения и сведение к квадратурам.
20. Угловая скорость как вектор. Момент импульса твёрдого тела. Момент инерции и уравнение движения свободного волчка.
21. Функция Гамильтона. Канонические уравнения. Примеры. Неособенные Лагранжианы.
22. Канонические преобразования. Производящая функция канонических преобразований. Фазовое пространство. Примеры.
23. Изменение физических величин со временем. Скобки Пуассона и их свойства. Сохранение физических величин. Теорема Пуассона.
24. Скобки Пуассона для канонически сопряжённых величин. Циклические переменные и интегрирование уравнений Гамильтона.
25. Простейшие колебательные системы. Понятие о нормальных координатах. Секулярное уравнение и собственные (нормальные) колебания.